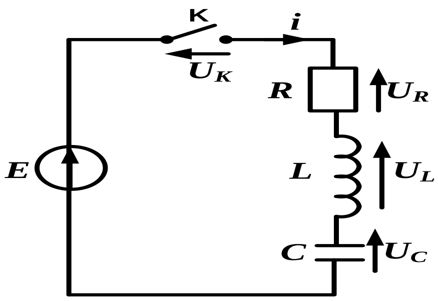
CHAPITRE 4 : Circuit linéaire du second ordre

Ce chapitre concerne l'étude de la réponse temporelle de systèmes d'ordre deux, qu'ils soient électriques ou mécaniques. Nous étudierons essentiellement le circuit RLC série comme modèle de l'oscillateur amorti. Nous verrons en effet qu'une analogie électromécanique permet d'identifier formellement cet oscillateur amorti (du fait de l'existence d'une résistance dans le circuit) à l'oscillateur mécanique (masse relié à un ressort et astreinte à se déplacer suivant l'axe horizontal) amorti par frottement visqueux (c'est-à-dire que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse).

1. Un oscillateur électrique : le circuit RLC série

1.1. Montage expérimental (régime forcé)

Pour étudier la charge d'un condensateur de capacité C à travers une bobine d'inductance L et une résistance R, on réalise le montage suivant:



- un générateur de tension continue de $f.é.m$ est branché aux bornes du circuit RLC ;
- pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert;
- à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K : le générateur débite alors un courant dans le circuit.
- Dans ce circuit i est l'intensité du courant, U_K la tension aux bornes de l'interrupteur, U_C la tension aux bornes du condensateur, U_L la tension aux bornes de l'inductance et U_R la tension aux bornes de la résistance. En convention récepteur on a :

$$\left.\begin{aligned} U_R &= Ri \\ U_L &= L\frac{di}{dt} \\ i = \frac{dq}{dt} &= C\frac{dU_C}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} U_R = RC\dfrac{dU_C}{dt} \\ U_L = LC\dfrac{d^2U_C}{dt^2} \end{cases}$$

1.2. Evolution de la tension U_C

1.2.1.Equation différentielle vérifiée par la tension U_C

- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert :

$$i = 0; \quad U_R = U_C = U_L = 0; \quad U_K = E$$

La tension E aux bornes du générateur de tension se retrouve donc aux bornes de l'interrupteur ouvert K.

- Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé :

$U_K = 0$ (tension aux bornes d'un fil donc même potentiel). En appliquant la loi des mailles on a :

$$U_R + U_L + U_C = E$$

En remplaçant U_R , U_C et U_L par leur expression, la tension U_C aux bornes d'un circuit RLC série soumis à l'échelon de tension E vérifie l'équation différentielle de second ordre:

$$\boxed{\boldsymbol{LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E}}$$

1.2.2. Solution de l'équation différentielle

Il faut résoudre l'équation différentielle :

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E$$

En divisant chaque membre de l'équation par LC, il vient :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC}U_C = \frac{E}{LC}$$

On pose :

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \Longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \alpha = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}; \quad Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ω_0 est la pulsation propre du circuit ; α est le coefficient d'amortissement (il est sans dimension) ; Q est le facteur de qualité (il est sans dimension). On définit aussi le facteur d'amortissement par :

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

- λ grand $\Longrightarrow$ circuit amorti
- $\lambda = 0 \Longrightarrow$ circuit non amorti $\Longrightarrow R = 0 \Longrightarrow$ circuit LC série.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + 2\alpha\omega_0\frac{dU_C}{dt} + {\omega_0}^2U_C = \frac{E}{LC}$$

- **Méthode de résolution mathématique**

La solution générale de cette équation différentielle est la somme de deux solutions :

- de la solution générale u_1 de l'équation sans second membre :

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\alpha\omega_0\frac{du_1}{dt} + {\omega_0}^2u_1 = 0$$

$u_1(t)$ solution de l'équation homogène qui tend vers 0 après quelques périodes : elle décrit le **régime transitoire**.

- d'une solution particulière u_2 constante avec second membre :

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + 2\alpha\omega_0\frac{du_2}{dt} + {\omega_0}^2\,u_2 = \frac{E}{LC}$$

Le régime permanent ou établi est complètement décrit par la solution particulière**.**

- **Solution particulière constante**

Puisque u_2 est constant, il vient :

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{du_2}{dt} = 0 \implies u_2 = E$$

- **Solution de l'équation sans second membre**

On cherche une solution de l'équation sans second membre sous la forme :

$$u_1 = Ae^{rt}$$

où A est une constante et r un réel.

La dérivée première et la dérivée seconde de u_1 donnent :

$$\frac{du_1}{dt} = Are^{rt} \;\; ; \;\; \frac{d^2u_1}{dt^2} = Ar^2e^{rt}$$

L'équation différentielle sans second membre devient :

$$r^2u_1 + 2\alpha\omega_0 ru_1 + {\omega_0}^2u_1 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2u_1 + \frac{\omega_0}{Q}ru_1 + {\omega_0}^2u_1 = 0$$

En simplifiant par u_1 on obtient le polynôme caractéristique en r :

$$r^2 + 2\alpha\omega_0 r + {\omega_0}^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0$$

Ce polynôme admet deux solutions. Il a pour discriminant Δ:

$$\Delta = 4\alpha^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(\alpha^2 - 1) = {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

- **Solution générale**

Selon le signe de Δ trois régimes de solutions sont possibles.

- **Le régime apériodique : $\Delta > 0 \Rightarrow \alpha > 1$ ou $Q < 1/2$**

La tension u tend vers sa valeur finale sans osciller, ce qui justifie le nom donné à ce régime. Le régime apériodique s'observe pour de faibles valeurs du facteur de qualité c'est-à-dire pour une valeur élevée de la résistance (amortissement trop fort). Le polynôme caractéristique admet 2 racines négatives :

$$\boldsymbol{r_1 = -\alpha\omega_0 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha\omega_0 - \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1} = -\omega_0\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right)}$$

$$\boldsymbol{r_2 = -\alpha\omega_0 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha\omega_0 + \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1} = -\omega_0\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right)}$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est :

$$u_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$U_C = u_1 + u_2 \Longrightarrow U_C = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + E$$

Application des conditions de continuité

La tension U_C aux bornes du condensateur et l'intensité i du courant dans l'inductance sont continues. À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sur la tension et l'intensité s'écrivent donc : $U_C(t = 0)$ et $i(t = 0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} i = C\dfrac{dU_C}{dt} \\ i(t = 0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dU_C}{dt}(t = 0) = 0$$

Les deux contions initiales permettant de trouver les constantes sont :

$$\boldsymbol{U_C(t = 0) \ \ et \ \ \frac{dU_C}{dt}(t = 0) = 0}$$

Il vient en appliquant ces conditions initiales:

$$U_C(t = 0) = 0 \Longrightarrow A_1 + A_2 + E = 0$$

$$\frac{dU_C}{dt}(t = 0) = 0 \Longrightarrow r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0$$

Il vient donc :

$$A_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2}E \quad \text{ et } \quad A_2 = \frac{-r_1}{r_1 - r_2}E$$

La tension U_C aux bornes du condensateur a donc pour expression :

$$\boxed{\boldsymbol{U_C(t) = E\left(\frac{r_2}{r_1 - r_2}e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2}e^{r_2 t} + 1\right)}}$$

L'évolution de $U_C(t)$ a lieu sans oscillations.

- **Le régime pseudo-périodique : $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$ ou $Q > {}^1/_2$**

Le régime pseudo-périodique s'observe pour des valeurs élevées du facteur de qualité donc pour des valeurs faibles de résistance (amortissement faible). Le polynôme caractéristique admet alors 2 racines complexes conjuguées à partie réelle négative. En posant :

$$\Omega^2 = -\Delta' = -\omega_0{}^2(\alpha^2 - 1) \Rightarrow \Omega = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Ω est appelée la **pseudo-pulsation** dont la pseudo-période est **:**

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{\frac{4Q^2}{4Q^2-1}}$$

Plus Q devient grand le système est non amortie

Il vient pour les 2 racines :

$$\boldsymbol{r_1 = -\alpha\omega_0 - j\Omega = -\alpha\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\alpha^2} = -\omega_0\left(\alpha + j\sqrt{1-\alpha^2}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + j\sqrt{4Q^2-1}\right)}$$

$$\boldsymbol{r_2 = -\alpha\omega_0 + j\Omega = -\alpha\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\alpha^2} = -\omega_0\left(\alpha - j\sqrt{1-\alpha^2}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - j\sqrt{4Q^2-1}\right)}$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est :

$$u_1 = [A\,cos(\Omega t) + B\,sin(\Omega t)]e^{-\alpha\omega_0 t}$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$U_C = u_1 + u_2 \Longrightarrow U_C = [A\,cos(\Omega t) + B\,sin(\Omega t)]\boldsymbol{e}^{-\alpha\omega_0 t} + E$$

D'après les conditions initiales (comme dans le régime apériodique), on a :

$$U_C(t=0) = 0 \Rightarrow A + E = 0 \Rightarrow A = -E$$

$$\frac{dU_C}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow B\Omega - \alpha\omega_0 A = 0 \Rightarrow B = \frac{-\alpha\omega_0}{\Omega}E$$

La tension U_C aux bornes du condensateur a donc pour expression :

$$\boxed{\boldsymbol{U_C(t) = E\left\{1 - e^{-\alpha\omega_0 t}\left[cos(\Omega t) + \frac{\alpha\omega_0}{\Omega}sin(\Omega t)\right]\right\}}}$$

L'évolution de $U_C(t)$ donne lieu à des oscillations amorties. La durée caractéristique de la décroissance est donnée par :

$$\boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}}$$

En régime pseudo-périodique, la pseudo-période T des oscillations amorties est constante mais diffère de la période propre.

- **Le régime critique : $\Delta = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ ou $Q = {}^1/_2$**

C'est la situation intermédiaire entre les deux régimes précédents. Le polynôme caractéristique admet une racine réelle double négative :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est :

$$\boldsymbol{u_1 = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}}$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$U_C = u_1 + u_2 \Longrightarrow U_C = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} + E$$

D'après les conditions initiales (comme dans le régime apériodique), on a

$$U_C(t = 0) = 0 \Rightarrow A + E = 0 \Rightarrow A = -E$$

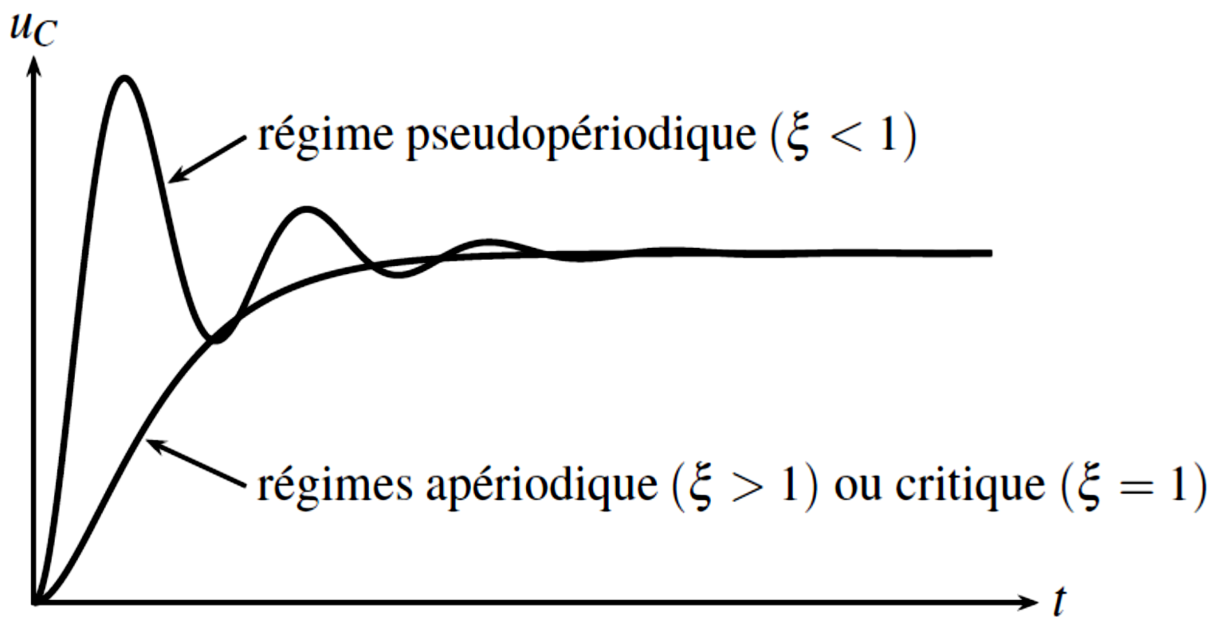
$$\frac{dU_C}{dt}(t = 0) = 0 \Rightarrow B - \omega_0 A = 0 \Rightarrow B = -E\omega_0$$

La tension U_C aux bornes du condensateur a donc pour expression :

$$\boxed{\boldsymbol{U_C(t) = E[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}]}}$$

La tension $U_C(t)$ évolue sans osciller.

Evolution de la tension $U_C(t)$ pour les différents régimes



1.3. Evolution de l'intensité *i*

On obtient l'intensité i du courant en dérivant la tension U_C aux bornes du condensateur obtenu dans chaque régime :

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$$

- **Le régime apériodique :** $\Delta > 0 \Rightarrow \alpha > 1$ **ou** $Q < {}^{1}/_{2}$

$$\boxed{i(t) = C\frac{r_1 r_2 E}{r_1 - r_2}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})}$$

- **Le régime critique :** $\Delta = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ ou $Q = {}^{1}/_{2}$

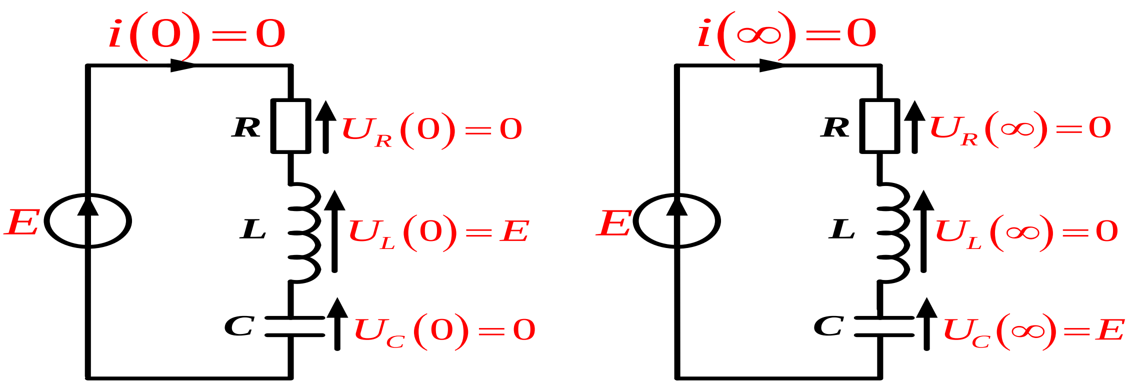
$$\boxed{i(t) = CE\omega_0{}^2 t e^{-\omega_0 t}}$$

- **Le régime pseudo-périodique :** $\Delta < 0 \Rightarrow \alpha < 1$ **ou** $Q > {}^{1}/_{2}$

$$\boxed{i(t) = CE\frac{\Omega^2 + \alpha^2 \omega_0{}^2}{\Omega} e^{-\alpha\omega_0 t} \sin(\Omega t)}$$

1.4. Interprétation physique

Quel que soit le régime, la charge du condensateur correspond à un régime transitoire. Lorsque le condensateur est chargé ($t \to \infty$), le régime permanent est atteint : on a alors $U_C = E$ et $i = 0$



1.5. Bilan énergétique

Lors de la charge du condensateur, en appliquant la loi des mailles, on a :

$$E = U_R + U_L + U_C = Ri + L\frac{di}{dt} + U_C$$

Pour obtenir des puissances, on multiplie par i :

$$Ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + CU_C\frac{dU_C}{dt} = Ri^2 + \frac{d(\frac{1}{2}Li^2)}{dt} + \frac{d(\frac{1}{2}CU_C^2)}{dt}$$

- Le terme Ei est la puissance P_g positive fournie par le générateur.

- Le terme Ri^2 est la puissance P_j positive reçue par la résistance et dissipée par effet joule dans R.
- Le terme $d(\frac{1}{2}Li^2)/dt$ est la puissance dE_{mag}/dt positive ou négative reçue par la bobine correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans l'inductance L sous forme magnétique.
- Le terme $d(\frac{1}{2}CU_C^2)/dt$ est la puissance $dE_{élec}/dt$ positive ou négative reçue par le condensateur correspondant aux variations de l'énergie emmagasinée dans la capacité C sous forme électrostatique.

On conclut que la puissance électrique fournie par le générateur est dissipée par effet joule dans la résistance R et sert à faire varier l'énergie dans la bobine et l'énergie du condensateur :

$$\boldsymbol{P_g = P_j + \frac{dE_{mag}}{dt} + \frac{dE_{élec}}{dt}}$$

- Soit W_g l'énergie électrique fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_g = \int_0^t Ei\,dt = CE\int_0^t \frac{dU_C}{dt}\,dt = CE[U_C(t) - U_C(0)] = CEU_C(t)$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, $U_C(\infty) = E$, il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{W_g = CE^2}}$$

- Soit W_L l'énergie emmagasinée dans la bobine L entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_L = \int_0^t \frac{d(\frac{1}{2}Li^2)}{dt}\,dt = \frac{1}{2}Li^2$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$, $i(\infty) = 0$,il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{W_L = 0}}$$

- Soit W_C l'énergie emmagasinée dans la capacité C entre l'instant $t = 0$ et l'instant t. On a :

$$W_C = \int_0^t \frac{d(\frac{1}{2}CU_C^2)}{dt}\,dt = \frac{1}{2}CU_C^2$$

Lorsque le condensateur est chargé $(t \to \infty)$,$U_C(\infty) = E$, il vient :

$$\boxed{W_C = \frac{1}{2}\mathrm{CE}^2}$$

puisque

$$W_g = W_J + W_L + W_C$$

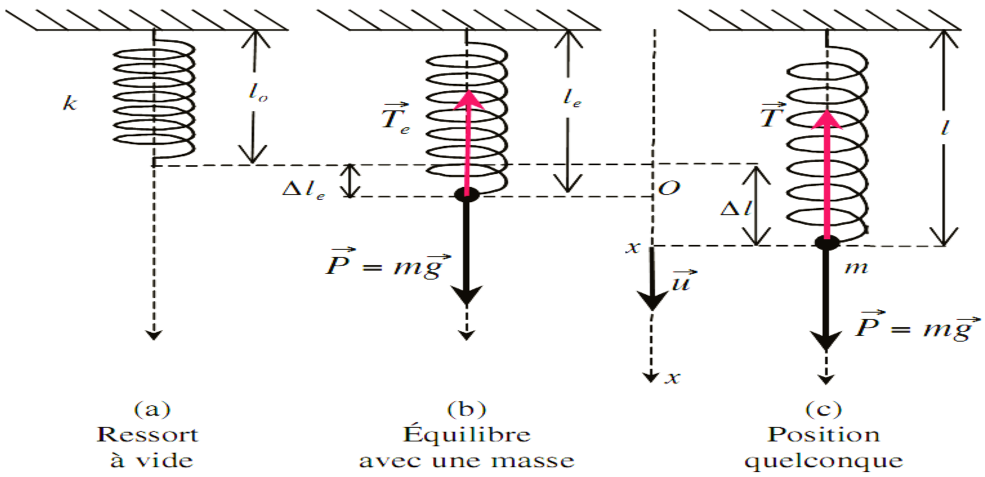
Il vient :

$$\boxed{W_J = W_g - W_L - W_C = CE^2 - 0 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2}$$

On conclut finalement qu'au cours de la charge la moitié de l'énergie électrique fournie par le générateur est dissipée par effet joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée sous forme électrostatique dans le condensateur. L'énergie magnétique, nulle au début de la charge est à nouveau nulle à la fin de la charge.

2. Oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux

Le pendule élastique se comporte comme un oscillateur harmonique à condition de négliger tout frottement. Il oscille théoriquement sans jamais s'arrêter.



En réalité la masse se déplace dans un fluide (en général l'air). Il existe donc toujours des forces de frottement de type visqueux $(\vec{f} = -\alpha\vec{v})$ où α est le coefficient de frottement visqueux. L'oscillateur est alors amorti et finit par s'arrêter.

2.1. Equation différentielle

En ajoutons la force de frottement de type visqueux telle que :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\frac{dx}{dt}\vec{u}$$

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a} \Longrightarrow mg - k(\Delta l_e + x) - \alpha\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

En tenant compte de la condition d'équilibre $mg - k\Delta l_e = 0$ on a :

$$-kx - \alpha\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

L'équation différentielle du mouvement de la masse devient donc :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur amorti par frottement fluide. Posons :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2m} = \lambda = \alpha\omega_0$$

Finalement l'équation différentielle de l'oscillateur amorti s'écrit :

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

- ✓ ω_0 : pulsation propre de l'oscillateur c'est-à-dire la pulsation avec laquelle il oscillerait de façon sinusoïdale si les frottements étaient négligeables
- ✓ λ : facteur d'amortissement. Il s'exprime en s^{-1}.

En fonction de la valeur de α on retrouve trois régimes d'oscillations : le régime apériodique $(\alpha > 1)$, le régime critique $(\alpha = 1)$, et le régime pseudo-périodique $(\alpha < 1)$,

2.2. Analogie entre les grandeurs mécaniques et électriques

Confrontons les équations différentielles obtenues pour les deux oscillateurs afin de déterminer les grandeurs mécaniques et les grandeurs électriques qui jouent un rôle équivalent. Les deux équations sont linéaires, du second ordre et à coefficients constants. Identifions ces coefficients :

$$\underbrace{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0}_{\substack{Equation\ du\ circuit \\ RLC\ série \\ en\ régime\ libre}} \qquad\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- Le coefficient de frottement α joue un rôle analogue à la résistance électrique R. Cela n'a rien d'étonnant puisque le frottement fluide linéaire et l'effet joule modélisent respectivement la dissipation énergétique des systèmes mécaniques et des systèmes électriques.

- La masse m et l'inductance L jouent également des rôles identiques. La masse m mesure l'inertie de l'oscillateur mécanique c'est-à-dire sa propension à poursuivre son mouvement en conservant une vitesse constante. Il semble donc que l'inductance L d'une bobine mesure son inertie électrique, sa tendance à conserver constant le courant électrique qui la traverse.
- La raideur k du ressort joue un rôle équivalent à l'inverse de la capacité C.

Le tableau ci-dessous définit les grandeurs analogues.

Analogie entre les oscillateurs amortis mécaniques et électriques			
Grandeurs électriques		**Grandeurs mécaniques**	
Charge du condensateur	q	Position ou déplacement de la masse	x
Intensité du courant	i	Vitesse de la masse	$\frac{dx}{dt} = v$
Résistance du circuit	R	Coefficient de frottement	α
Inductance propre	L	Masse	m
Capacité du condensateur	C	Inverse de la raideur du ressort	$\frac{1}{k}$
Energie magnétique	$E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$	Energie cinétique	$E_C = \frac{1}{2}mv^2$
Energie électrostatique	$E_{elec} = \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	Energie potentielle élastique	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$
Pertes par effet joule	$P_j = Ri^2$	Pertes par frottement	$P_f = \alpha v^2$